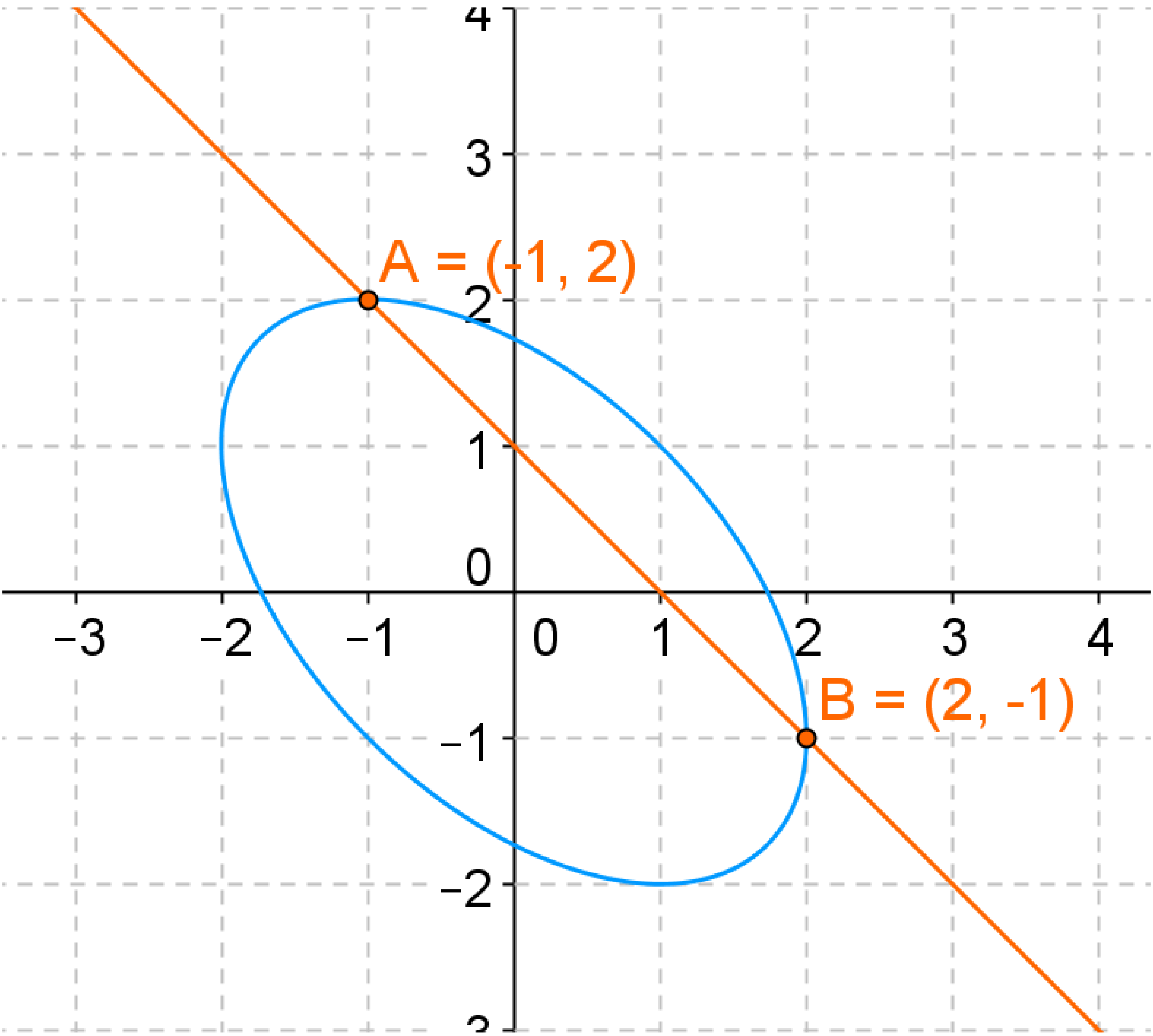
Η γραφική ερμηνεία μη γραμμικών συστημάτων του σχολικού βιβλίου

Α1 σ.27

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=1 \end{cases}.$$



$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=1 \end{cases}.$$

Στο βιβλίο των Calculus (9η έκδοση) στο κεφάλαιο 9.3 των Thomas Finney λέει:

«In this section, we examine <u>one of the most amazing results in analytic geometry</u>, which is that the Cartesian graph of any equation

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

in which A, B, and C are not all zero, is nearly always a conic section.

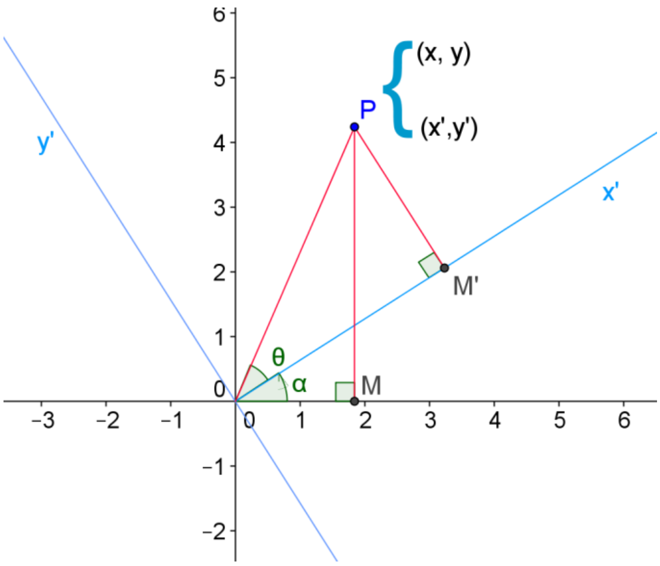
The exceptions are the cases in which there is no graph at all or the graph consists of two parallel lines.»

Η εξίσωση

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Με τις αντικαταστάσεις

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$



Γίνεται:

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$$

όπου:

$$A'=A\cos^2\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha$$

$$B'=B\cos2\alpha+(C-A)\sin2\alpha$$

$$C'=A\sin^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$$

$$D'=D\cos\alpha+E\sin\alpha$$

$$E'=-D\sin\alpha+E\cos\alpha$$

$$F'=F$$

Για να είναι το $\mathrm{B}'=0$ πρέπει να ισχύει κάποιο από τα δύο:

$$\sigma\varphi 2\alpha=\frac{\mathrm{A}-C}{B}$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}-C}$$

Στην περίπτωσή μας όπου $x^2+xy+y^2=3$

είναι A=1 B=1 και C=1 οπότε:

$$\sigma\varphi 2\alpha=\frac{\mathrm{A}-C}{B}\Rightarrow \sigma\varphi 2\alpha=0\Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\alpha=0\Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{A}'=\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+\frac{1}{2}\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha=1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=1+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{B}'=\mathrm{B}\cos 2\alpha+\left(C-\mathrm{A}\right)\sin 2\alpha=1\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\left(1-1\right)\sin\frac{\pi}{2}=0+0=0$$

$$C'=\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-\frac{1}{2}\cdot 2\cos\alpha\sin\alpha=1-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Αρα η εξίσωση στο νέο σύστημα συντεταγμένων *(όπου έχει γίνει περιστροφή κατά 45 μοίρες)* γίνεται:

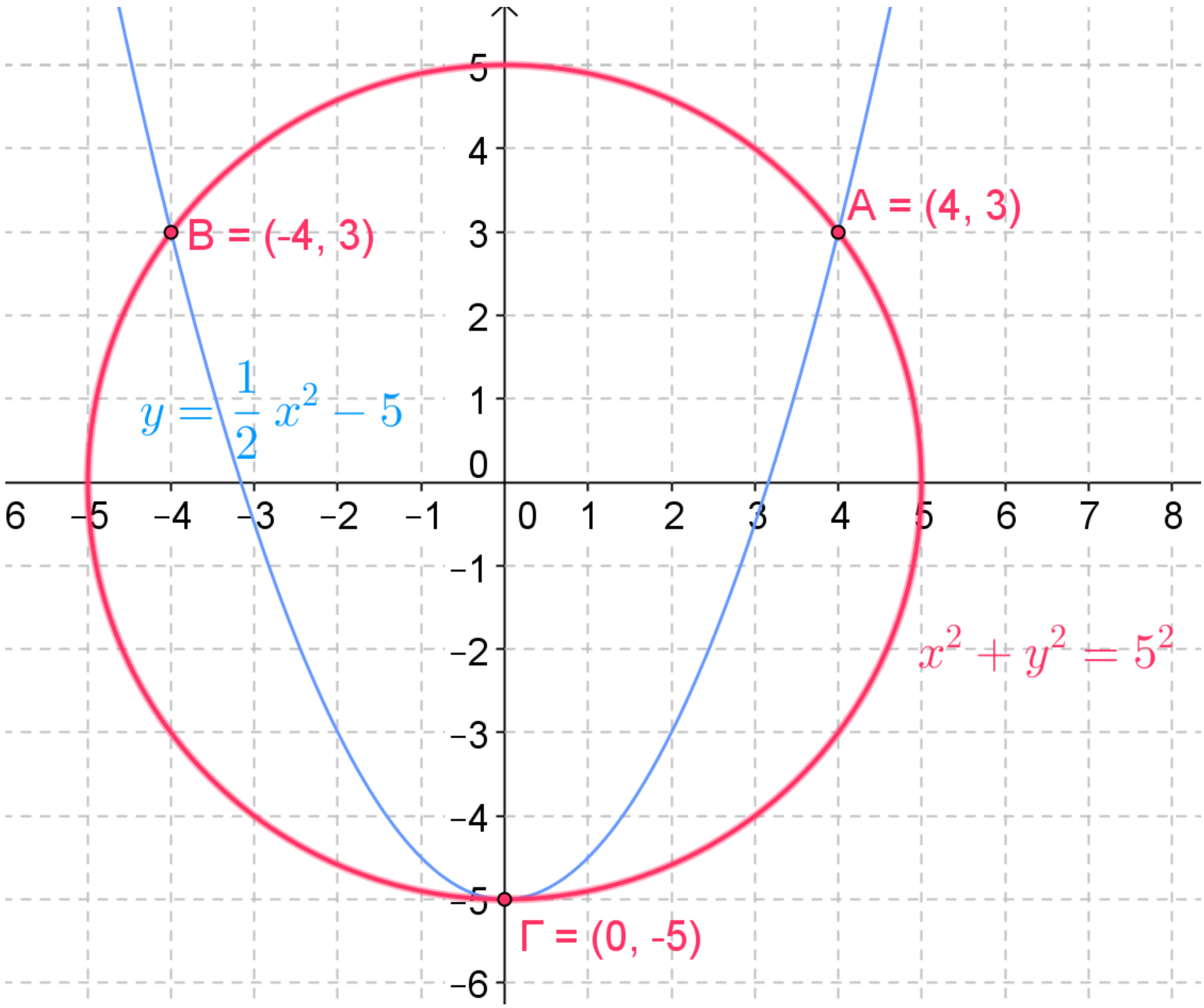
$$\frac{3}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2=3\Leftrightarrow 3x'^2+y'^2=6\Leftrightarrow\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{6}=1$$

$\beta^2=2\quad \alpha^2=6\qquad \gamma^2=\alpha^2-\beta^2=6-2=4\Leftrightarrow\gamma=2$ ή $\gamma=-2$

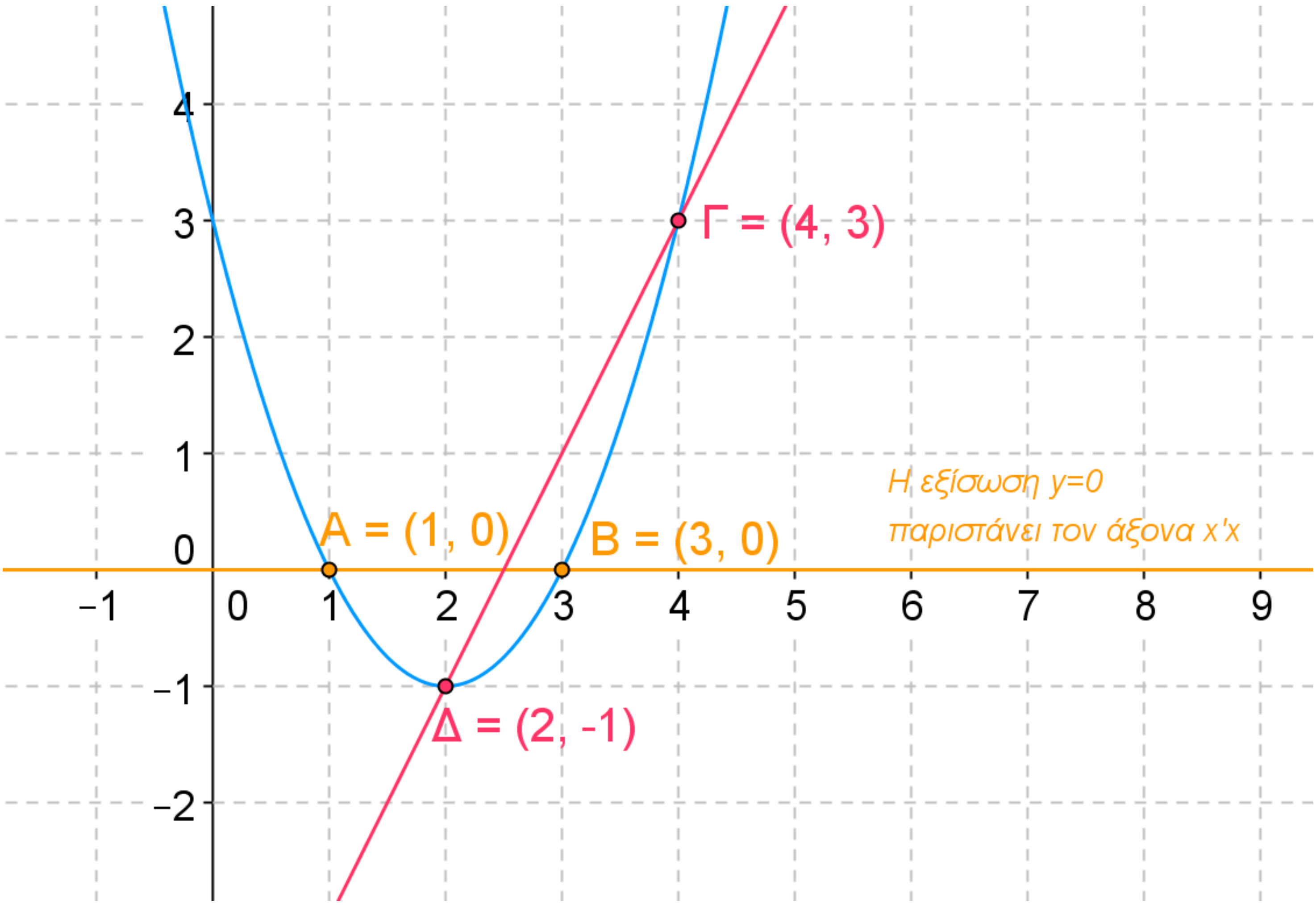
Αρα οι εστίες της έλλειψης στο νεό σύστημα αξόνων $x'Oy'$ έχουν συντεταγμένες

$\left(0,2\right)$ και $\left(0,-2\right)$

Β1 σ.27 σχολικού



B2 σ.28



Γ = (4, 3)
Η εξίσωση y=0
παριστάνει τον άξονα x'x
A = (1, 0)
B = (3, 0)
Δ = (2, -1)
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9